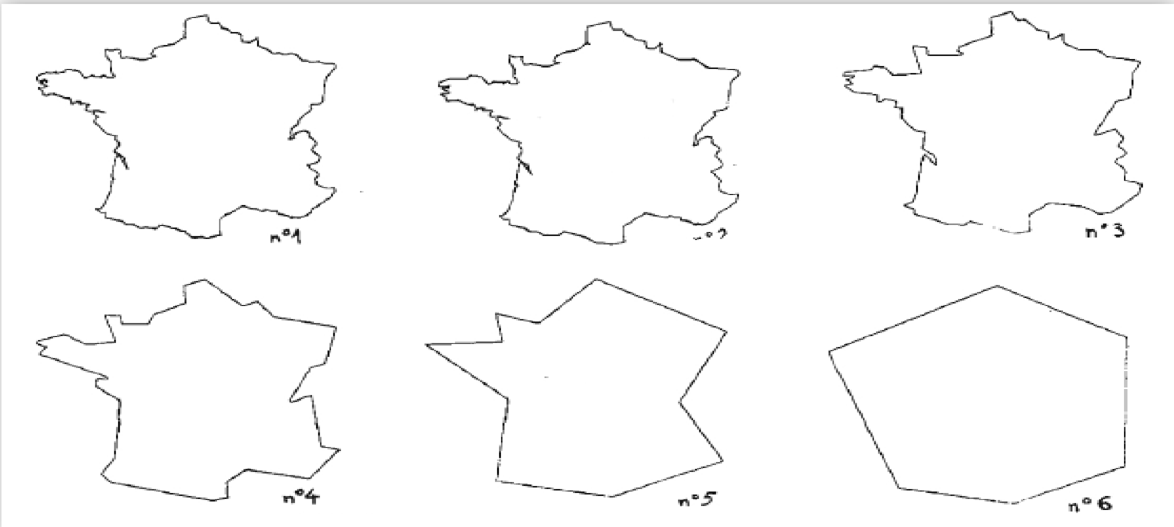
Introduction.

C'est en lisant un article de Jean Lefort Mathématicien Français, que nous avons décidé de réaliser ces travaux. Son article porte sur les objets fractals de Mandelbrot, en prenant comme angle d'attaque : la cartographie et cela à travers l'exemple de la carte de France.

Lefort explique que la longueur du contour de la France augmente en fonction de l'échelle à laquelle on se situe. Ceci est du au fait qu'en fonction de l'échelle à laquelle on observe la France, le niveau des détails visibles à l'œil nu varie très fortement. Le dessin du trait de côte va donc être plus ou moins précis en fonction de l'échelle et de la manière dont on interprète le contour de la côte et le contour de notre pays.



Comme nous le montre la figure ci-dessus, extraite de l'article de Monsieur Lefort, le dessin du contour de notre pays a été réalisé avec des niveaux de précision variable. La figure n°1 propose un contour prenant en compte un niveau de détails relativement précis, la figure n°6 est une représentation très schématique du contour.
Jean Lefort nous dit dans son article "*sur le dessin n°6 la longueur est de 153 mm, sur le n°5 elle est de 167 mm, sur le n° 4 de 193 mm*". On constate donc que la longueur du périmètre augmente.

Nous avons voulu refaire cette expérience sur des exemples réels, pour vérifier si la longueur du contour d'un pays, d'une région ou d'un continent augmente en fonction de l'échelle. Nous avons voulu voir aussi, quelle était l'influence de l'augmentation de la longueur de ce périmètre sur la surface d'une zone géographique (polygone complexe).

En effet, intuitivement la géométrie nous dit que plus le périmètre d'un polygone croît, plus sa surface augmente. C'est le cas pour les formes géométriques simples comme les parallélogrammes, les triangles, les cercles etc.

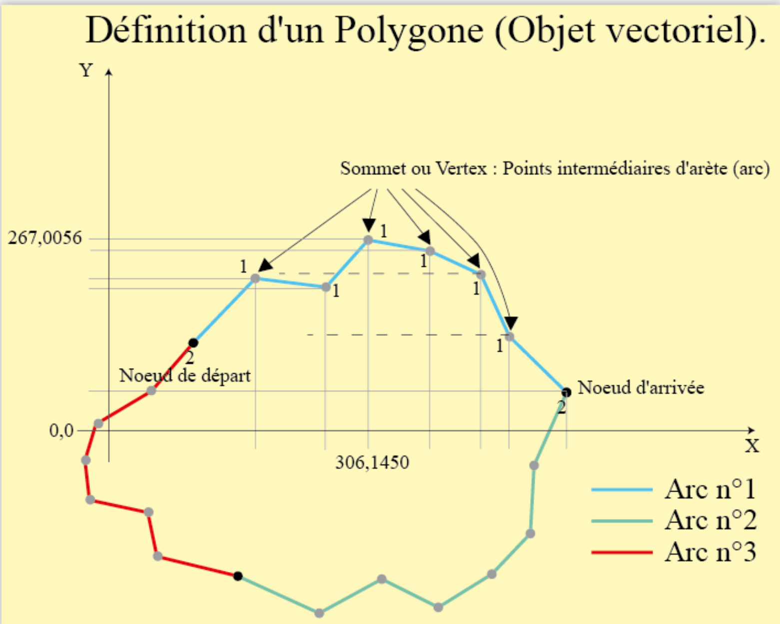
Pour cela, nous nous sommes basés sur des outils disponibles via internet. Ce sont des images satellites à très hautes résolutions, sur lesquelles nous avons numérisé différentes zones géographiques. Nous avons ainsi réalisé le trait de côte du continent africain, celui de la Corse, de l'Italie, enfin la Guadeloupe.

Ces images satellites sont issues des bases de données comme : " Web Imagerie Bing Maps de Microsoft" ou "Google Earth". Les quatre cartes citées ci-dessus ont été numérisées avec ces supports image. Nous les avons numérisées avec le niveau de précision maximum. Les cartes sont les résultats de plusieurs centaines d'heures de travail en temps cumulés. Nous avons ensuite tester nos résultats face à d'autres sources cartographiques, pour avoir des éléments de comparaison. Enfin, nous avons fait un test sur la fractalité de la côte de Guadeloupe et cela à plusieurs échelles, pour observer si le niveau d'échelle faisait varier la dimension fractale de cette côte.

Les cartes numériques et les objets géographiques vectorielles.

L'outil utilisé.

Le travail de numérisation des cartes a été réalisé grâce au logiciel SIG quantum GIS (http://qgis.org/fr/site/). Ce logiciel est téléchargeable gratuitement sur internet. Ce logiciel permet de mettre en place des systèmes d'informations géographiques. Les cartes produites grâce à ce logiciel sont dites vectorielles. La figure ci-dessous présente un exemple d'objet vectoriel.



Les primitives graphiques.

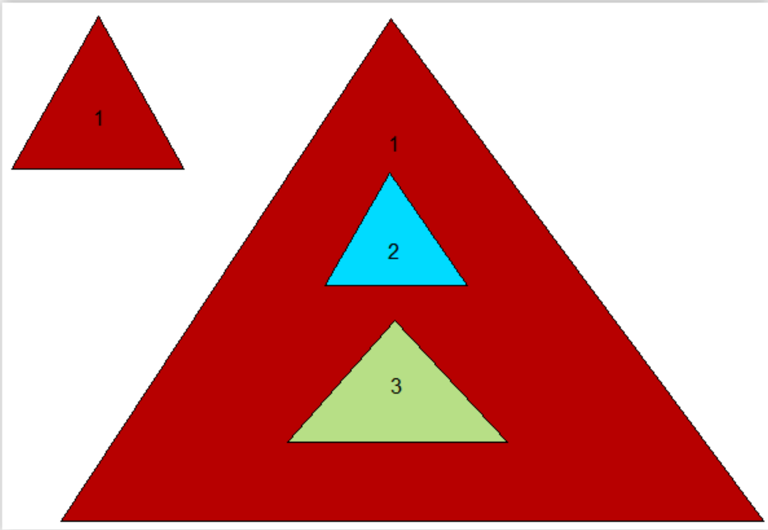
Les objets d'une carte numérique, peuvent être des points, des polylignes, des polygones.
Un point est un couple de coordonnées géographiques dans un repère le plus souvent orthonormé.
Structure de l'objet.

{ Identifiant du point 1, {X,Y}
Identifiant du point 2, {X,Y}
Identifiant du point 3, {X,Y} }
1, 7.112213, 22.944561
2,19.843917, 20.072165
3, 14.642550, 8.660210
END (fin de l'ensemble des points)

Une polyligne est un ensemble de points reliés entre eux par un segment de droite

```
{   { Identifiant de la ligne 1
    {X1,Y1}
    {X2,Y2}
    {X3,Y3}        }
    { Identifiant de la ligne 2
    {X4,Y4}
    {X5,Y5}
    {X6,Y6}        }
    { Identifiant de la ligne 3
    {X7,Y7}
    {X8,Y8}
    {X9,Y9}        } }
1
5.714831, 16.733974
9.363551, 19.373473
10.139874, 22.789296
12.391212, 24.186679
END
2
15.263608, 24.807737
18.136005, 24.885370
19.999181, 22.401135
24.268960, 21.857708
END
3
24.734754, 19.761635
25.355813, 16.733974
22.949210, 16.733974
20.930769, 18.830047
END
END  (fin de l'ensemble des polylignes)
```

Un polygone est un ensemble de poly lignes dont la particularité est de former une zone fermée. Ce type d'objet posent un certain nombre de problèmes complexes à gérer. En effet, si nous prenons le cas d'un pays comme l'Afrique du Sud, il faut savoir qu'existe au sein de son territoire, le royaume indépendant du Lesotho. Il faut aussi prendre en compte les îles dépendantes des territoires.



Ici, le polygone 1 est un pays englobant les deux autres pays 2 et 3. L'île au nord ouest lui appartient. Les polygones 2 et 3 sont entièrement inclus dans le pays n°1.

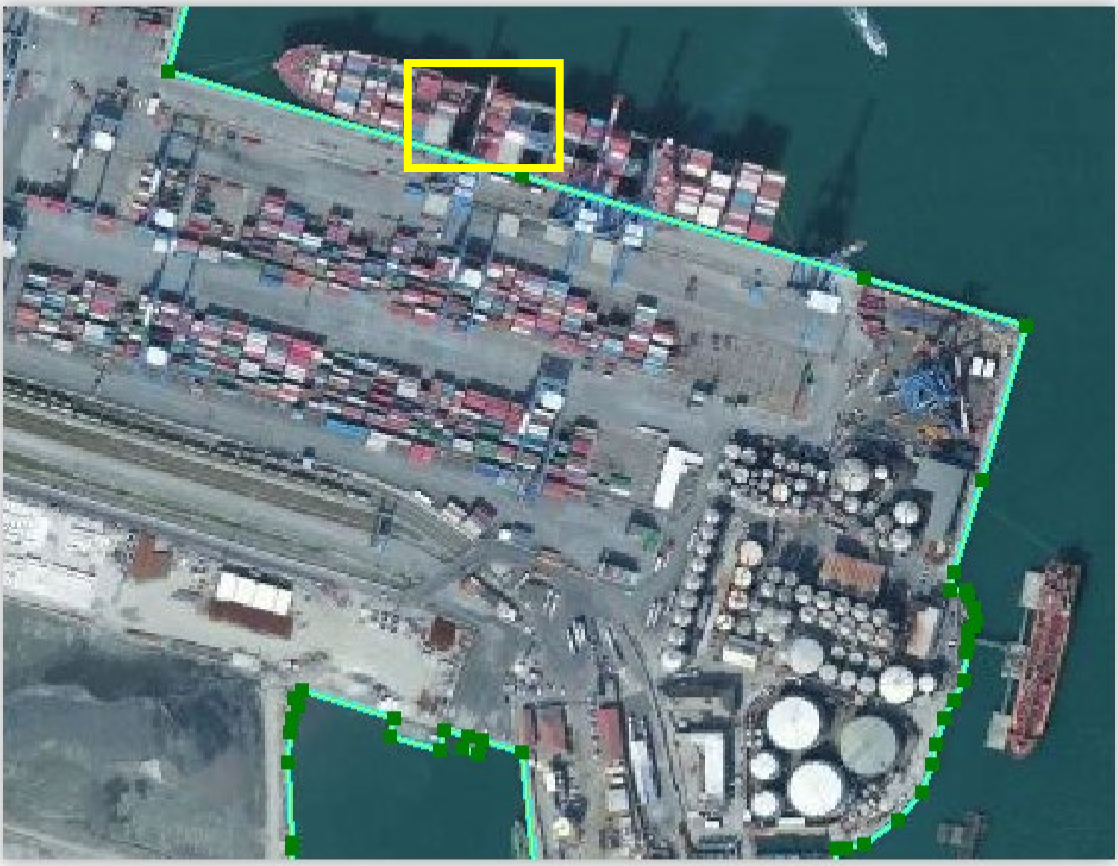
```
{   {       Identifiant du polygone 1
      {X1,Y1}
      {X2,Y2}
      {X3,Y3},                        Coordonnées du polygone 1 englobant
      { {X4,Y4},{X5,Y5}, {X6,Y6} },        trou dans la polygone 1 correspondant  polygone 2
              { {X7,Y7},{X8,Y8}, {X9,Y9} },        trou dans la polygone 1 correspondant
polygone 3
      {X10,Y10}    },                 Ile Nord Ouest du polygone 1
    {       Identifiant du polygone 2
      {X10,Y10}
      {X11,Y11}
      {X12,Y12}    },
    {       Identifiant du polygone 3
        {X13,Y13}
        {X14,Y14}
        {X15,Y15}  }        }        Fin de l'ensemble des polygones.
```

```
1
0.095733, 0.776648
0.171274, 0.641589
0.019047, 0.641589
0.095733, 0.776648
END
1
0.357837, 0.507676
0.262839, 0.400087
0.457414, 0.400087
0.357837, 0.507676
END
1
0.354404, 0.774359
0.684037, 0.330269
```

0.062540, 0.330269
0.354404, 0.774359
END
1
0.353259, 0.638156
0.296031, 0.538579
0.421933, 0.538579
0.353259, 0.638156
END
2
0.353259, 0.638156
0.421933, 0.538579
0.296031, 0.538579
0.353259, 0.638156
END
3
0.357837, 0.507676
0.457414, 0.400087
0.262839, 0.400087
0.357837, 0.507676
END
END

Précision sur la numérisation des objets géographiques.

Les cartes numériques sont produites aujourd'hui sur la base d'images numériques à haute résolution, sur lesquelles, on dessine les contours des objets géographiques comme ci-dessous :



Voir zoom ci-dessous.

Copie d'écran, Echelle 1/6000ième, 1cm sur la carte = 6000 cm au sol soit 60 mètres.

Source : Images BING.

Copie d'écran , Echelle 1/1000ième, 1cm sur la carte = 1000 cm au sol soit 10 mètres.

Source : Images BING.

Copie d'écran , Echelle 1/300ième, 1cm sur la carte = 300 cm au sol soit 0.3 mètres.

Source : Images BING.

On peut constater sur les documents précédents l'extrême précision des images satellites mises à notre disposition. Il est donc évident qu'avec du temps et de la patience, on peut produire des documents cartographiques d'une qualité inégalée jusqu'à présent.

Finalement, ce travail est comparable à ce que nous faisions lorsque nous étions enfants et que nous ne savions pas dessiner. Nous dessinions par exemple un éléphant avec du papier calque en recopiant les contours de l'animal dans un livre.

Présentation de quelques unes de nos production cartographique.

Trait de côte.

Attention, un trait de côte que l'on numérise n'est qu'une interprétation de celui-ci basée sur des images. Cela signifie, que ce trait numérisé ne peut pas correspondre à la réalité. Il est donc subjectif.

Il varie de plus en fonction des côtes. Certaines côtes sont soumises à de très fortes marées, d'autres ont des marées quasi inexistantes comme en méditerranée, où elle n'est que d'une quarantaine de centimètres en moyenne sur les côtes françaises. Elle est imperceptible pour la plupart du commun des mortels.

Où donc est réellement le trait de côte sur une plage ?

Est-ce la limite des plus basses eaux ?

Est-ce la limite des plus hautes eaux ?

Est-ce une limite moyenne entre la limite des plus basses eaux et celle des plus hautes eaux ?

Comment doit-on gérer ce trait de côte au niveau des cours d'eau qui se jettent en mer ?

Doit-on prendre en compte les ports ?

Le trait de côte est donc une représentation arbitraire basé sur des choix qui sont fait par la personne qui numérise ce trait de côte. Donner une définition du trait de côte est donc très difficile.

Définition selon le Service Hydrographique et Océanographique de la Marine :

"Le trait de côte correspond à la laisse des plus hautes mers dans le cas d'une marée astronomique de coefficient 120 et dans des conditions météorologiques normales (pas de vent du large, pas de dépression atmosphérique susceptible d'élever le niveau de la mer). Le produit "trait de côte Histolitt®" modélise cette entité théorique par un ensemble de polylignes 2D".

Comme on le voit ci-dessus, cette définition du SHOM qui est la référence incontestée en France, est très précise. Elle est pourtant le résultat de choix, qui par contre, prennent en compte des critères scientifiques. Elle reste malgré tout subjective puisqu'établie sur des choix en essayant d'être le plus objectif possible.

Nous avons fait le choix de ne pas comparer tous nos traits de côte. Nous n'en comparerons que quelques uns avec d'autres sources de données. Cette comparaison se fera sur la Corse et la Guadeloupe.

L'Afrique.

Cette carte a été numérisée avec soin à des niveaux d'échelles variables en fonction des zones géographiques. Selon les zones où nous nous trouvions sur cette côte africaine, les images étaient de plus ou moins bonnes qualités, des nuages pouvaient être présents sur les images, d'où ces échelles variables. Dans certain cas, nous avons été chercher des compléments dans Google Earth pour combler les trous. Nous nous sommes efforcés dans la mesure du possible de travailler au plus proche du sol donc à grande échelle.

Voici donc une représentation du trait de côte de l'Afrique d'une très bonne qualité. Cette carte est le résultat de plusieurs mois de travail. voici les caractéristiques de cette carte :

	Afrique	Madagascar	Îles africaines	Total
Surface en Km²	32833359.79	670011.00	30344.70	33533715.49
Périmètre en Km	54724.85	11128.60	14206.20	80059.65
Nombre de sommets du contour	549443.00	110362.00	254203.00	914008.00
Distance moyenne en m entre deux Sommets	99.60	100.84	55.89	87.59
Numérisation basée sur les images Web Imagerie Bing Maps de Microsoft				

Tous les résultats de ce tableau ont été calculés en utilisant les outils de calcul du logiciel utilisé.

L'Afrique dans son ensemble.

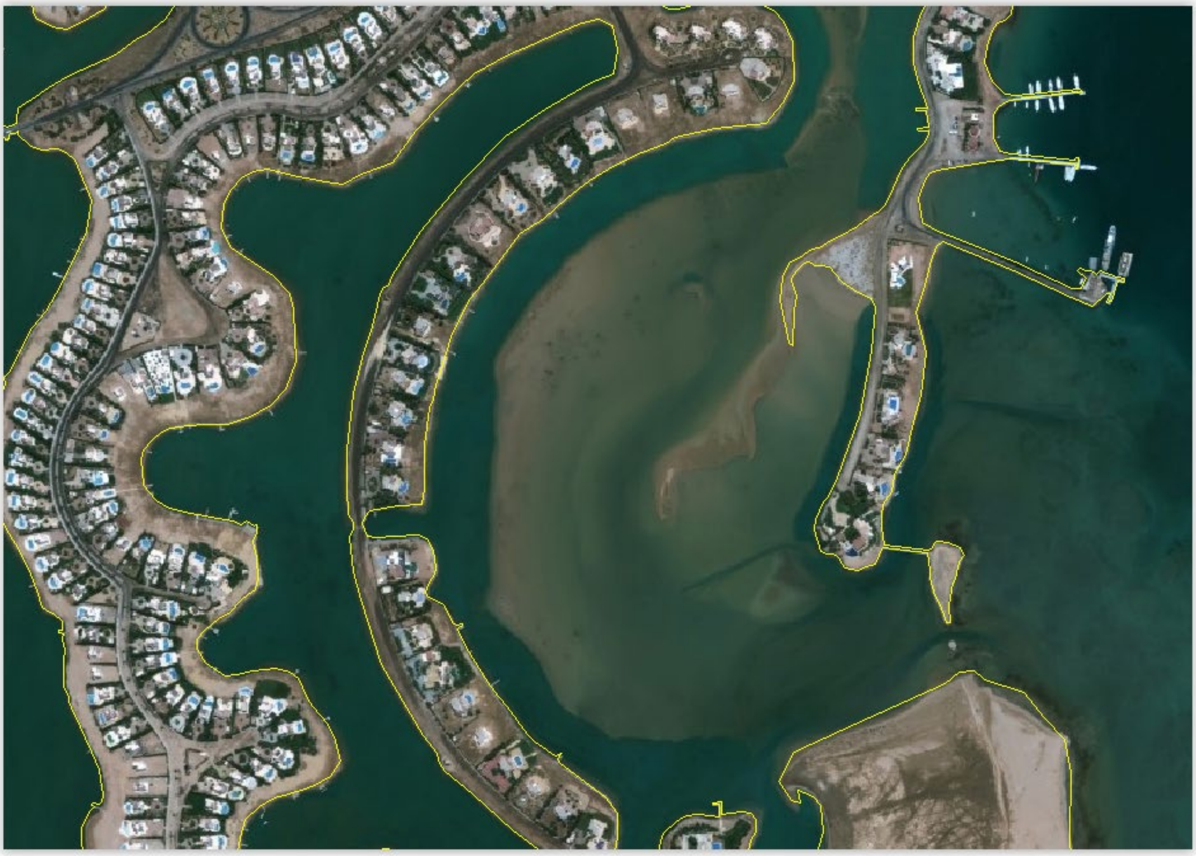
Zoom sur les Canaries.

Zoom sur tenerife.

Zoom sur la ville de Tenerife.

Zoom sur le port de Tenerife.

El Gouna, Egypte.



Nous pourrions multiplié ainsi les exemples. L'Afrique a été numérisée avec ce même niveau de précision sur l'ensemble de sa côte.

Zoom sur Gibraltar.

Zoom sur Tanger.

Nouvelles infrastructures.

Ici, on peut constater que des travaux d'infrastructures portuaires ont été faits. En fait, le trait de côte a été numérisé sur des images plus anciennes. Les images Bing ont donc subi des mises à jour.

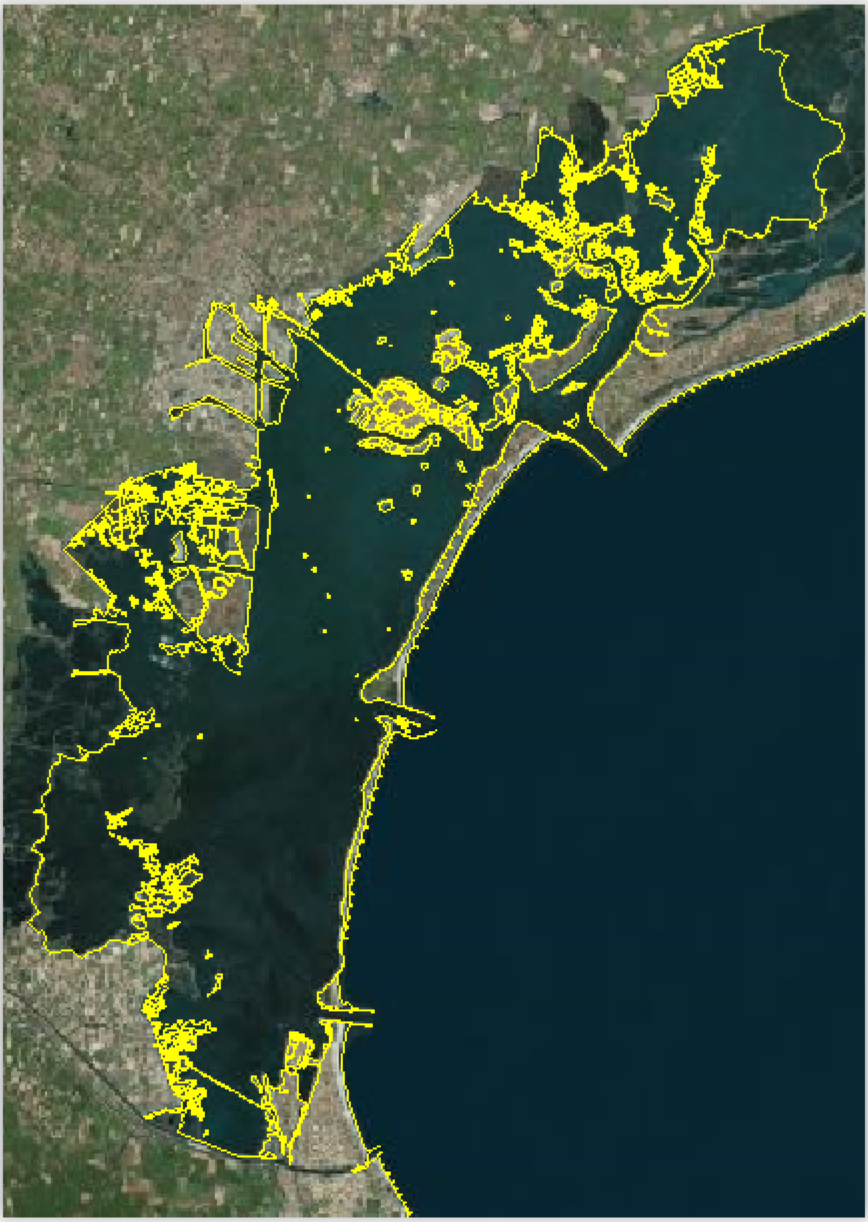
Zoom sur le centre du port de Tanger.

L'Italie.

Nos travaux sur l'Italie ont là encore étaient réalisés avec le plus grand soin. Nous avons fait en sorte d'être au plus près du trait de côte afin d'assurer une précision maximum.

Italie (Bing)
Surface en Km² = 478160
Périmètre en Km = 13386.2
Nombre de sommets = 511340
Distance moyenne entre deux Sommets = 26.1786

Zone de Venise.



Venise centre.

Le Grand Canal.

Piazza San Marco.

Naples.

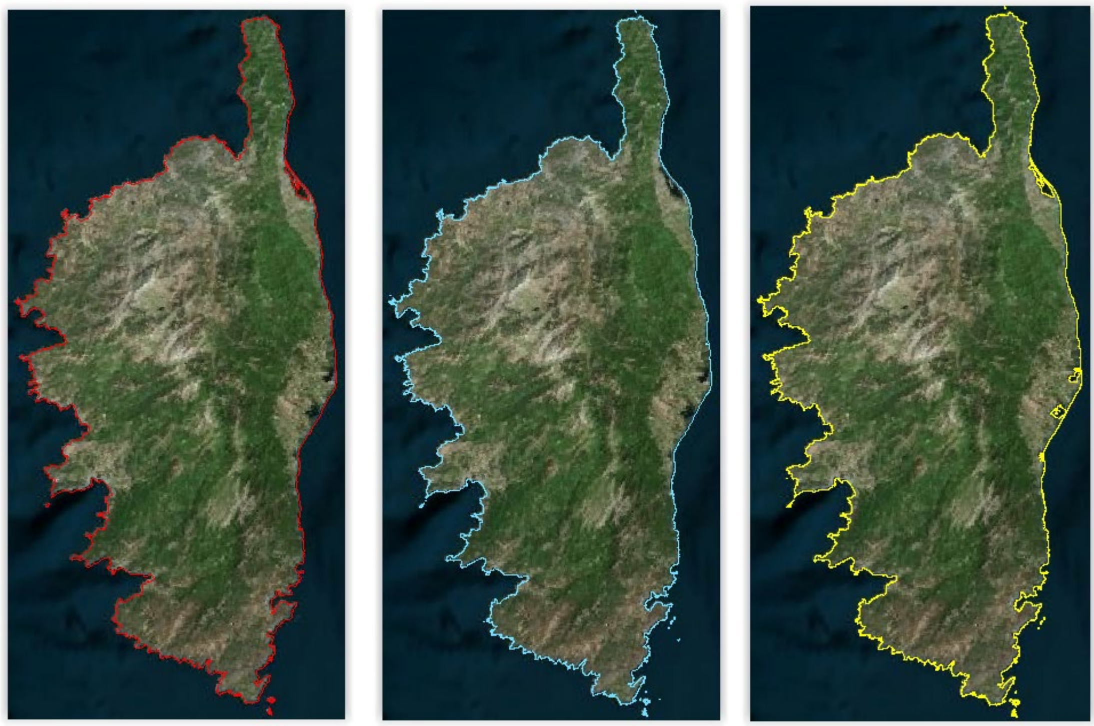
Détroit de Messine.

Ile Volcano.

La Corse.

	Corse (Bing)	Corse Landsat
Surface en Km²	= 8727.44	8781.55
Périmètre en Km	= 1698.46	972.732
Nombre de sommets	= 799520	11963
Distance moyenne entre deux Sommets	= 2.12434	81.3117

Nous comparerons ici trois traits de côte différents. Deux d'entre eux, sont les résultats de nos travaux, le premier provient d'un fournisseur d'informations géographiques, Ils sont présentés ci-dessous :



GfK Marketing — Numérisation Landsat TM — Numérisation BING

Les trois traits de côte comparés

Les couleurs choisies seront respectées.

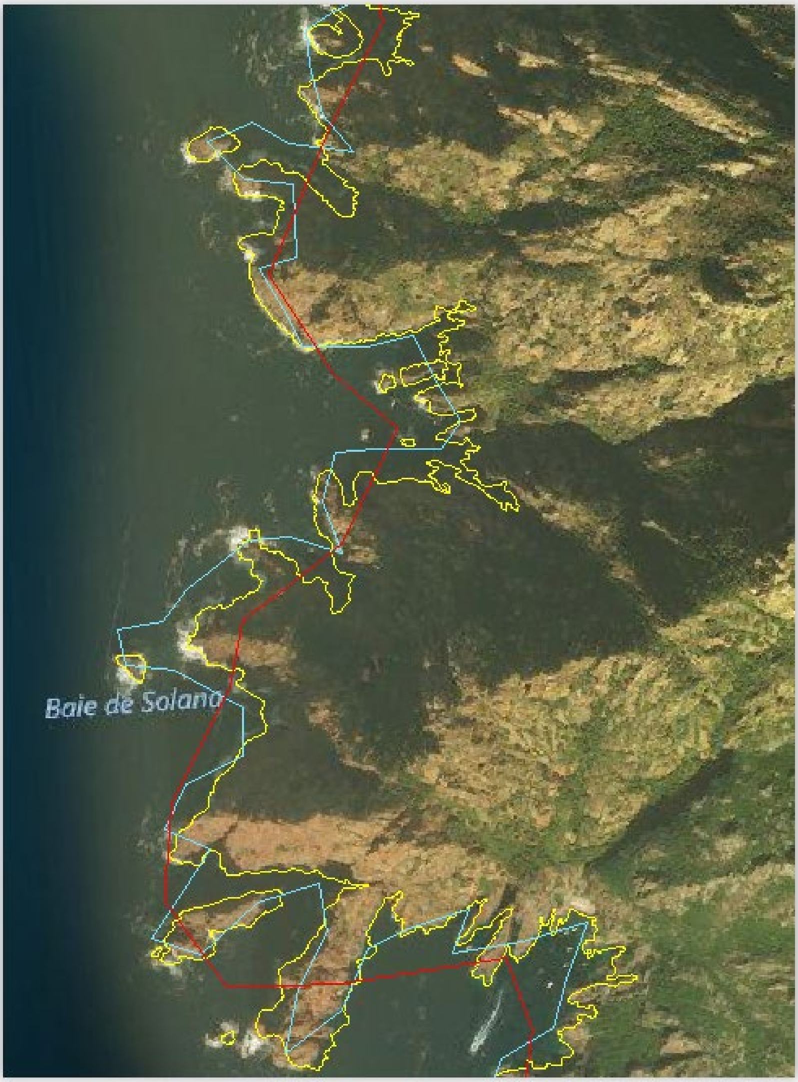
Le trait rouge, trait de la société	:	GfK Marketing
Le trait Bleu	:	Notre Numérisation Images Landsat TM
Le trait Jaune	:	Notre Numérisation Images BING

La numérisation avec les images Landsat TM est beaucoup moins précise que celle réalisée avec les images Bing, puisque basée sur des images dont les pixels font 30 mètres de coté. De plus, elle a été effectuée à des échelles comprises entre le 1:10000 et 1/20000 selon les endroits sur la côte.

Zone entre la baie de Macinaggio et la baie de Taramone.

Le trait rouge, trait de la société	:	GfK Marketing
Le trait Bleu	:	Notre Numérisation Images Landsat TM
Le trait Jaune	:	Notre Numérisation Images BING

Golfe de Solana.



Le trait rouge, trait de la société : GfK Marketing
Le trait Bleu : Notre Numérisation Images Landsat TM
Le trait Jaune : Notre Numérisation Images BING

Ajaccio.

Le trait rouge, trait de la société	:	GfK Marketing
Le trait Bleu	:	Notre Numérisation Images Landsat TM
Le trait Jaune	:	Notre Numérisation Images BING

Porto-Vecchio.

Le trait rouge, trait de la société	:	GfK Marketing
Le trait Bleu	:	Notre Numérisation Images Landsat TM
Le trait Jaune	:	Notre Numérisation Images BING

Bonifacio.

Le trait rouge, trait de la société	:	GfK Marketing
Le trait Bleu	:	Notre Numérisation Images Landsat TM
Le trait Jaune	:	Notre Numérisation Images BING

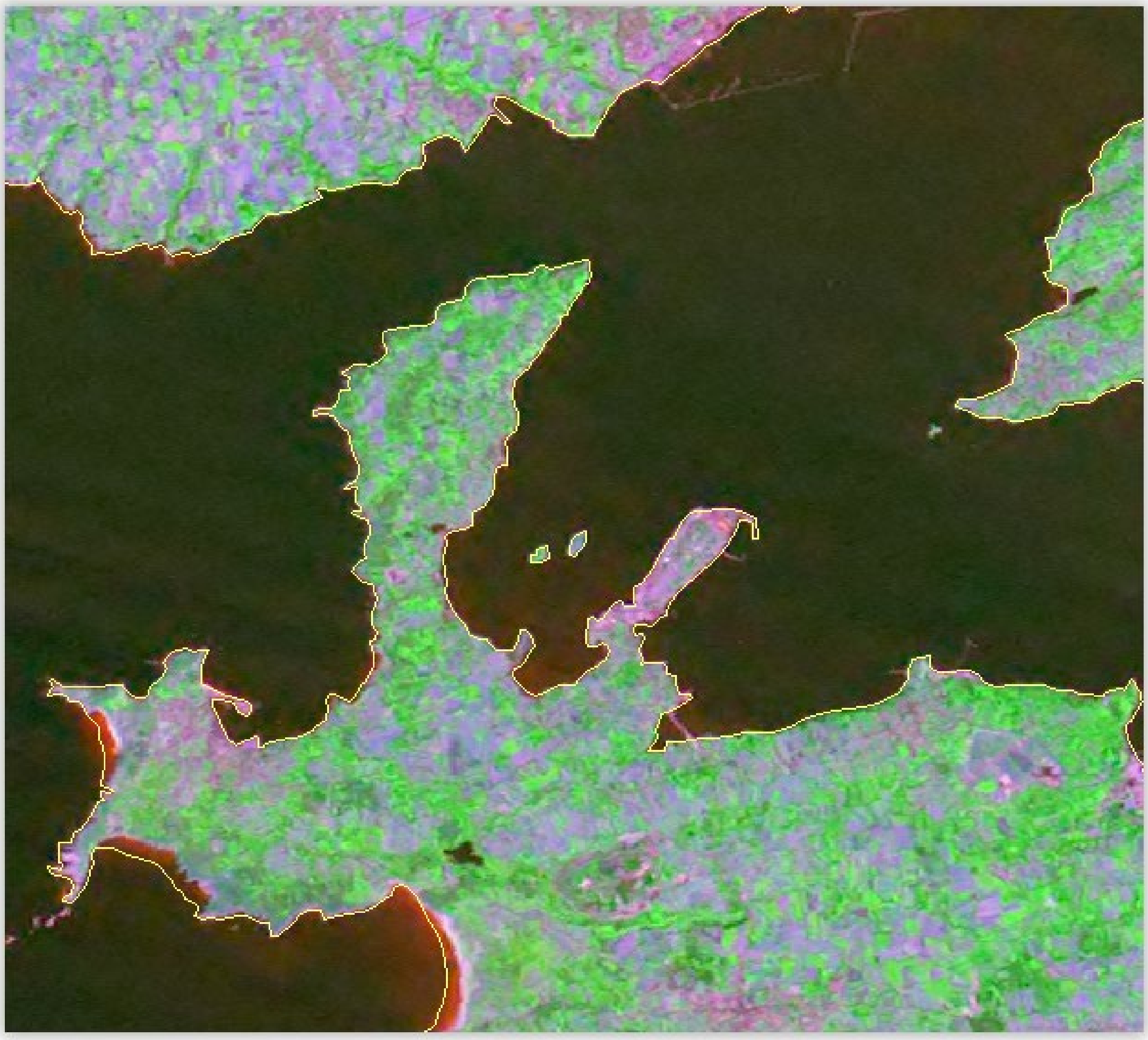
Le contour de la France Images Landsat TM.

Ce travail a été réalisé en 2011. La numérisation a été effectuée sur des Images du satellite "Landsat Thematic Mapper". Elles correspondent à des prises de vues de 1990. Les pixels ont une résolution spatiale de 28.5 m. Elles ont été reprojetées en projection Lambert II étendu, avec une unité métrique.

Nous présentons ici quelques exemples obtenu sur le contour de la France obtenu possède les caractéristiques suivantes :

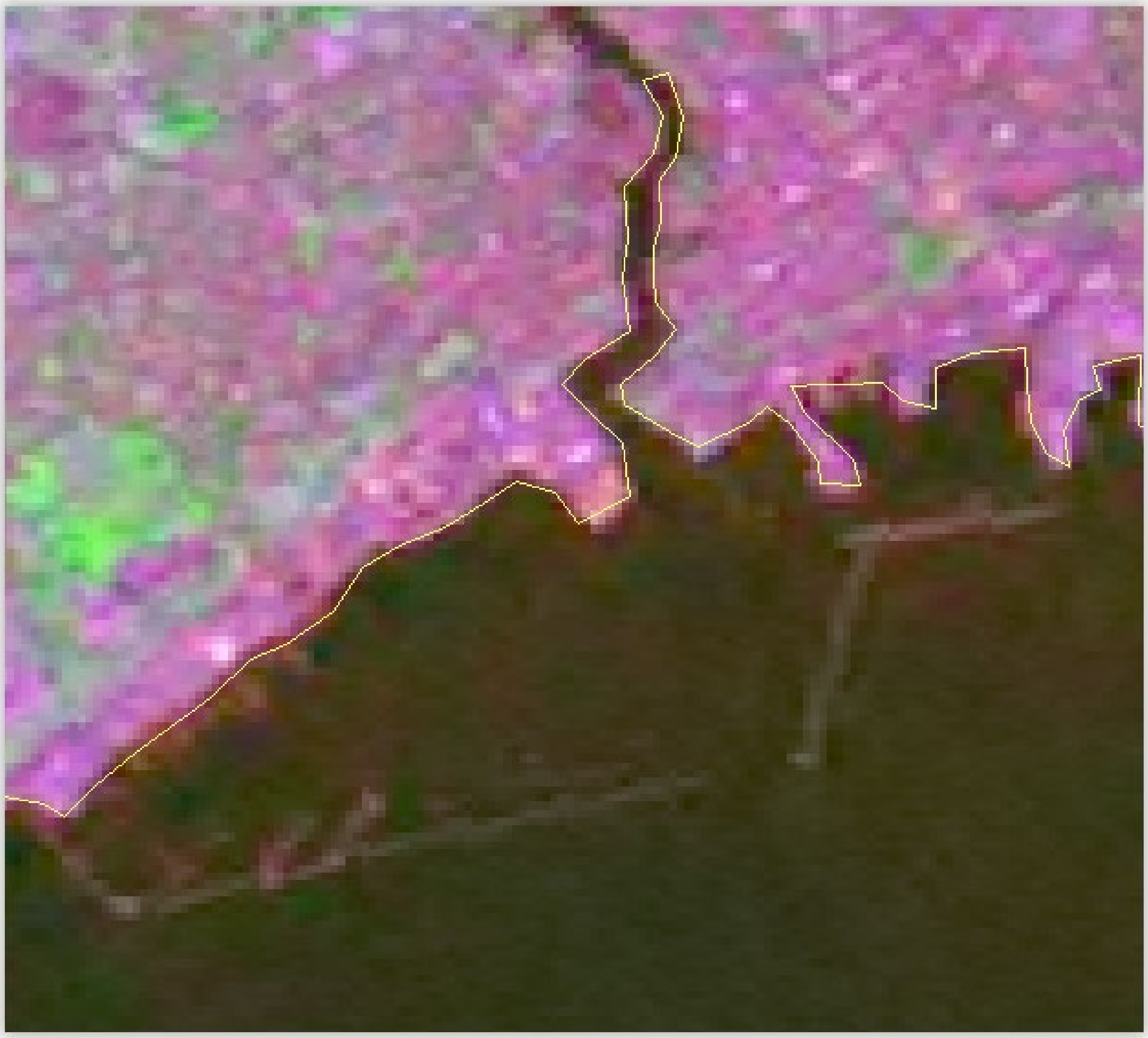
Surface : 550082,59 Km².
Périmètre : 13291,37 Km.
nombre de sommets : 110595.
Distance moyenne entre deux sommets : 8,32 m.

Conception et réalisation : Valérie Freiré-Diaz, Victoire Desvois 2011.



Echelle : 1/100000.

Echelle : 1/50000.



Echelle : 1/25000

Avec ce type d'image, on peut constater que la plage d'échelle d'utilisation est limitée. La précision de numérisation ne peut donc être que limitée en terme de qualité.

Travaux à différentes échelles sur la Guadeloupe.

Nous présentons ici quelques exemples du trait de côte numérisé au 1/800.

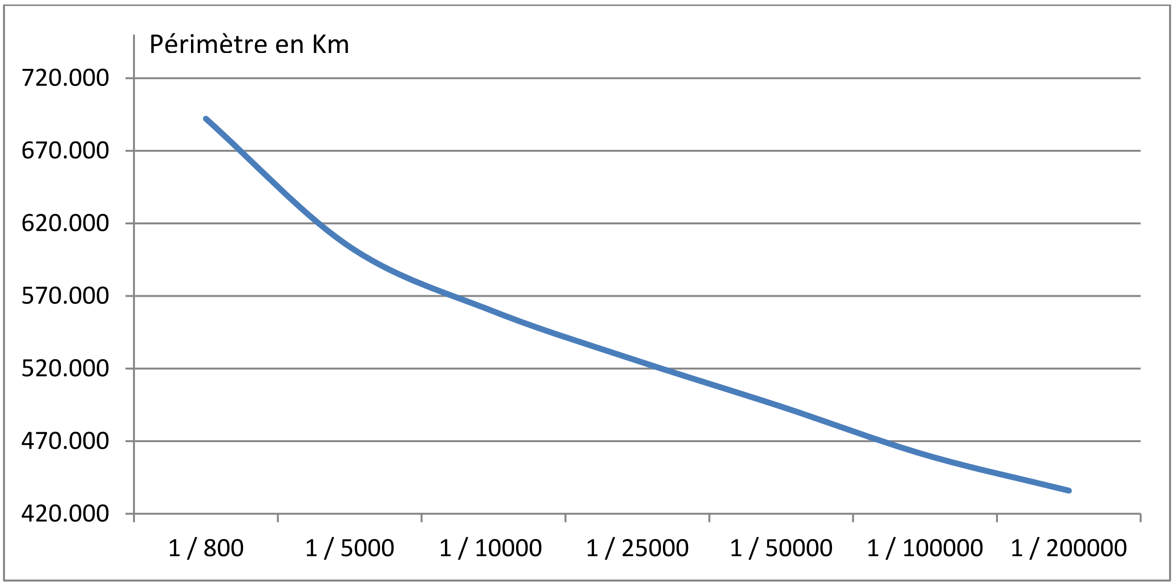
Fort de France au 1/30000.

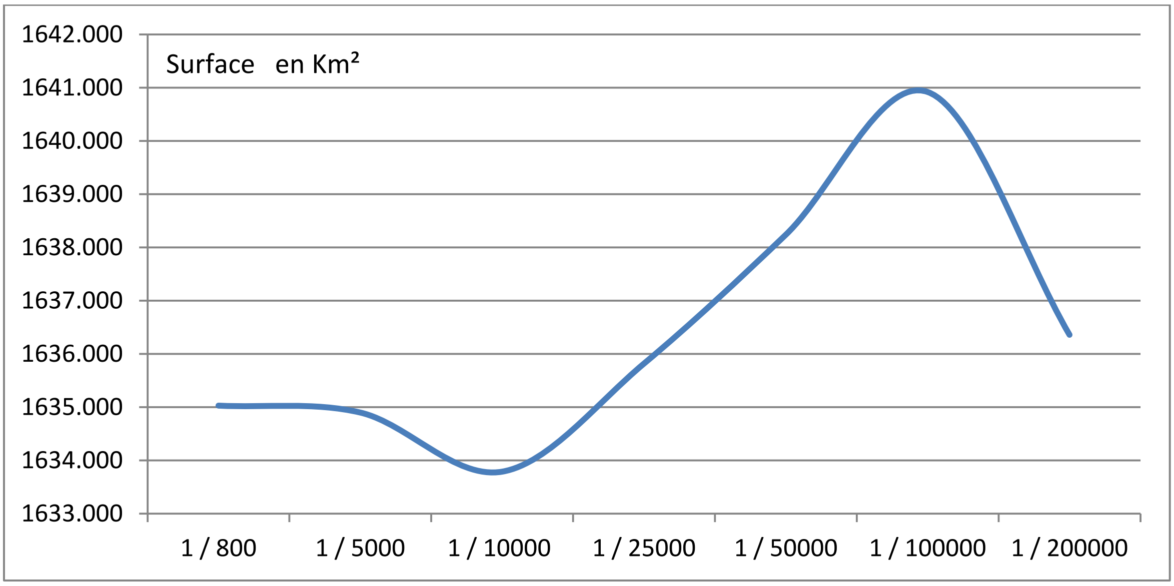
Fort de France au 1/10000.

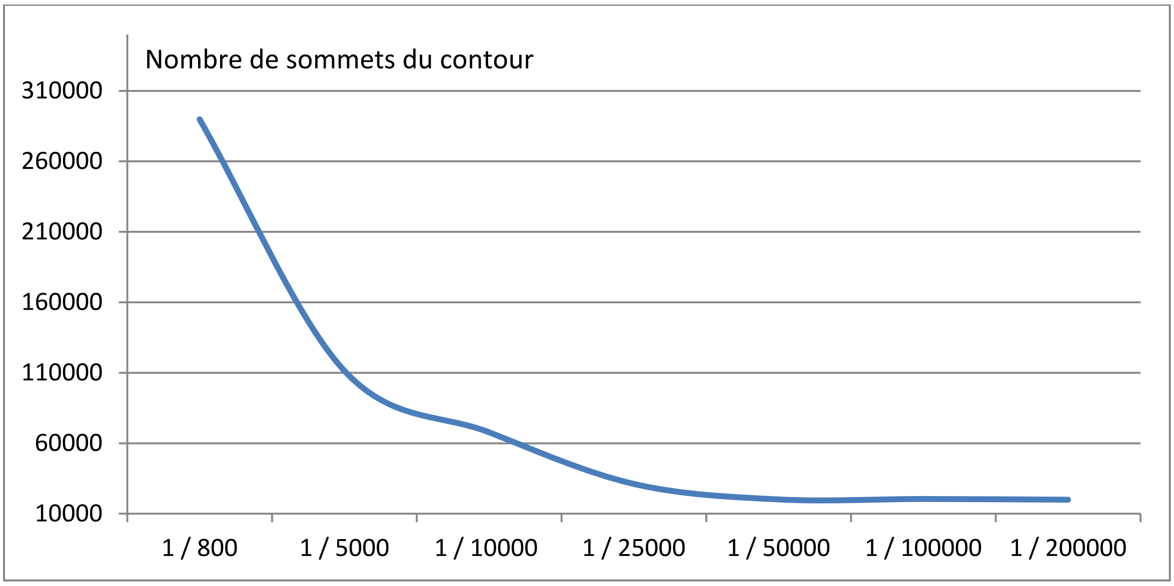
Fort de France au 1/5000.

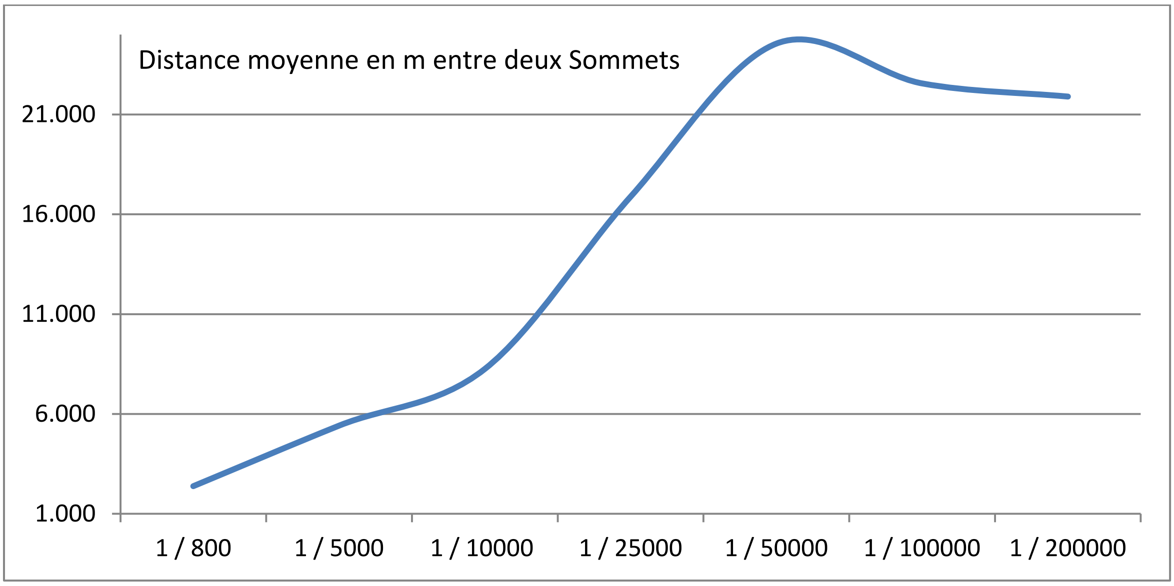
Fort de France au 1/800.

Guadeloupe	Echelles de Numérisation						
	1 / 800	1 / 5000	1 / 10000	1 / 25000	1 / 50000	1 / 100000	1 / 200000
Surface en Km²	1635.030	1634.900	1633.790	1635.820	1638.240	1640.920	1636.360
Périmètre en Km	692.067	603.898	559.431	525.448	493.873	460.709	436.011
Nombre de sommets du contour	289823	111454	67757	31127	20122	20430	19916
Distance moyenne en m entre deux Sommets	2.388	5.418	8.256	16.881	24.544	22.551	21.892
Numérisation basée sur les images Web Imagerie Bing Maps de Microsoft							


Périmètre en Km
720.000
670.000
620.000
570.000
520.000
470.000
420.000
1 / 800
1 / 5000
1 / 10000
1 / 25000
1 / 50000
1 / 100000
1 / 200000


Surface en Km²
1642.000
1641.000
1640.000
1639.000
1638.000
1637.000
1636.000
1635.000
1634.000
1633.000
1 / 800
1 / 5000
1 / 10000
1 / 25000
1 / 50000
1 / 100000
1 / 200000


Nombre de sommets du contour
310000
260000
210000
160000
110000
60000
10000
1 / 800
1 / 5000
1 / 10000
1 / 25000
1 / 50000
1 / 100000
1 / 200000



Influence de l'échelle sur la longueur du trait de côte.

Comme on peut le constater sur les graphiques ci-dessus, notre travail de numérisation entre l'échelle 1:800 et l'échelle 1:200000, confirme bien les dires de Benoît Mandelbrot et Jean Lefort. Plus l'échelle est grande plus on colle au terrain, plus les rentrants et saillants d'une côte sont pris en compte, et donc plus le périmètre tend vers l'infini. Sur la Guadeloupe, le périmètre au 1:800^{ième} est de 692.067 Km et il tombe à 436.011 Km à l'échelle 1:200000^{ième} soit une baisse de 36.998 % par rapport à l'échelle 1:800.

Influence de l'échelle sur la longueur du trait de côte.

Intuitivement et en fonction des connaissances que avons apprises en géométrie, nous savons que la surface d'un polygone augmente en fonction de son périmètre. Si on prend l'exemple d'un carré, quand celui-ci fait un 1 cm de coté, on a une surface d'un 1 cm², quand un carré a un coté de 2 cm, la surface passe à 4 cm², pour 3 cm de coté, on a une surface de 9 cm² et ainsi de suite. La surface augmente donc en fonction de la longueur du contour.

La Surface d'un pays côtier (polygone complexe) devrait donc obéir à ce principe or il n'en est rien. La surface devrait augmenter en fonction de la longueur du trait de côte. Si on regarde le graphique sur les surfaces, on peut constater que ce n'est pas vrai. La surface varie en fonction de l'échelle à laquelle on numérise une côte. Ceci s'explique par la manière dont un contour est dessiné, notamment toutes les indentations d'une côte.

Contour au 1/800 Contour au 1/200000

Contour au 1/800 Contour au 1/200000

Trait empiétant sur la Terre Trait empiétant sur la mer.

Les figures ci-dessus, présentent le trait de côte le plus précis au 1/800 et celui au 1/200000. Celui au 1/800 colle de manière très précise à la côte de Guadeloupe. Ceci est normal, puisqu'au 1/800 on voit très bien le détail de la côte. Evidemment, en numérisant le trait de côte au 1/200000, on s'éloigne fortement du sol. On voit de moins en moins les indentations de la côte. Le dessin ne peut donc qu'être beaucoup imprécis comme on le voit sur la figure. Les détails de la côte étant moins visibles, le trait pourra empiéter sur la mer ou même sur la Terre. Ceci explique la façon plus où aberrante dont les surfaces évoluent en fonction de l'échelle. La surface n'augmente donc pas obligatoirement quand la longueur d'un contour augmente.

Echelle	Longueur trait de côte en Km	Surface en Km²
1/800	692.067	1635.030
1/200000	436.011	1636.360

Au 1/200000 une longueur plus faible et pourtant une surface un peu plus forte.

Pour approcher au plus près la réalité, la longueur du trait de côte de la Guadeloupe et de sa Surface, il faut donc numériser ce trait de côte le plus près possible du terrain, numériser à l'échelle la plus grande possible. Ici, nous nous sommes limités au 1/800.

Echelle et sommets.

Concernant le nombre de sommets constituant le contour d'une côte, il augmente fortement en fonction de l'échelle. Plus l'échelle est petite, donc plus on est éloigné du sol pour dessiner, moins on aura de sommets. Plus on se rapprochera du sol (grande échelle) plus le nombre de sommets sera important car on dessinera plus précisément la côte, les caps et les baies. Enfin, la distance moyenne entre deux sommets baisse fortement quand on travaille à petite échelle.

Dimension fractale des côtes le cas de la Guadeloupe.

Les objets fractals et notion de dimension fractale.

Quand nous observons la nature, on peut constater que certains objets de la réalité présentent certaines régularités. Si j'observe un arbre, je vois un tronc, puis celui-ci se divise en un certain nombre de branches, qui elles-mêmes se subdivisent en rameaux, qui se subdivisent eux-mêmes en sous rameaux et ainsi de suite jusqu'aux feuilles de cette arbre. Si maintenant, je déracine cet arbre, on observe un phénomène similaire au niveau des racines de cette arbre. Sur une réseau hydrographique, un réseau de cours d'eau, on peut observer une organisation assez similaire. En bref, dans de nombreux domaines d'études, on constate que les objets d'études présentent ce genre d'organisation en fonction de l'échelle d'observation.

Ces objets présentent des similarités en fonction de l'échelle à laquelle on les observe.

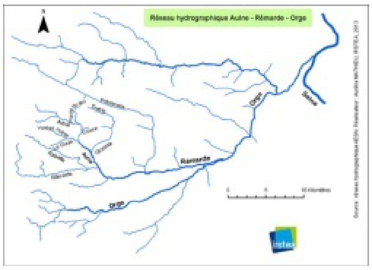
La description de ces objets ne peut pas se faire efficacement avec la Géométrie classiques.

Ils sont auto similaires c'est-à-dire que le tout est assez similaire à l'une des parties de l'objet à plus grande échelle.

Quelques objets auto similaire :

Un arbre.

Chou Romasesco



Réseau hydrographique.

Cette notion d'échelle est fondamentale en Géographie. Certains objets géographiques sont des objets fractals. Ici, nous n'avons travaillé que sur la côte de Guadeloupe. Nous avons voulu tester l'aspect fractale de cette côte et calculer sa dimension fractale à différentes échelles de numérisation (dessin de cette côte).

Méthodologie de calcul.

La dimension fractale est liée à la notion de dimension topologique. La topologie est une branche des mathématiques qui traite des notions de limite, de contiguïté, de continuité, de voisinage dans un espace dit topologique. Ces notions sont fondamentales en Géographie.

La limite c'est une frontière, une côte, la "sphère" terrestre. La contiguïté, c'est la distance séparant géométriquement deux objets géographiques ou qui peuvent se toucher. La continuité, c'est la surface d'un lac sur laquelle je navigue, le voisinage, c'est la France voisine de l'Allemagne, la connexité, ce des routes qui sont reliées entre elles grâce aux intersections, etc. cette liste est loin d'être exhaustive.

"La dimension topologique est une notion permettant d'étendre à des espaces métriques la notion algébrique de dimension d'un espace vectoriel."
Source : http://dictionnaire.sensagent.leparisien.fr/Dimension%20topologique/fr-fr/

Un point est de dimension 0, une ligne même brisée est de dimension 1, une surface de dimension 2 enfin un volume est de dimension 3. On associe la plupart du temps, cette notion de dimension à une valeur entière or,

"Certaines structures très irrégulières, souvent construites par itération, possèdent des symétries de dilatation caractéristiques : l'agrandissement d'une partie est semblable au tout. Le concept de **fractalité** *unifie la description de nombreux objets mathématiques ou physiques et quantifie leur degré d'irrégularité. Il a été introduit en 1975 par Benoît Mandelbrot, mathématicien français qui a poursuivi ses recherches aux États-Unis, dans les laboratoires d'I.B.M. Le terme* **fractal***, forgé à partir du latin* **fractus** *(du verbe* **frangere***, qui signifie « briser »), souligne le caractère fractionné à l'infini de ces ensembles présentant des irrégularités à toutes les échelles.*

Les mathématiciens du début du xx^e siècle (Georg Cantor, Felix Hausdorff ou Helge von Koch), qui s'interrogeaient sur la notion de dérivabilité, avaient construit toutes sortes de contre-exemples aux règles habituelles du calcul infinitésimal : des courbes continues mais ne possédant de tangentes en aucun point ; des surfaces et des volumes très irréguliers. On avait associé à ces objets une dimension dite de Hausdorff-Besicovitch, définie comme suit : on couvre l'objet par des boules de diamètre δ inférieur à ε, et on étudie la limite, quand ε tend vers 0, de la valeur minimale de la somme des δ^{α} ; la dimension est la valeur de α pour laquelle cette limite saute de 0 à l'infini. Pour une figure régulière, cette dimension est identique à la dimension topologique ordinaire (1 pour une ligne, 2 pour une surface, etc.), mais cela n'est pas vrai en général."

Source : http://www.universalis.fr/encyclopedie/fractales/

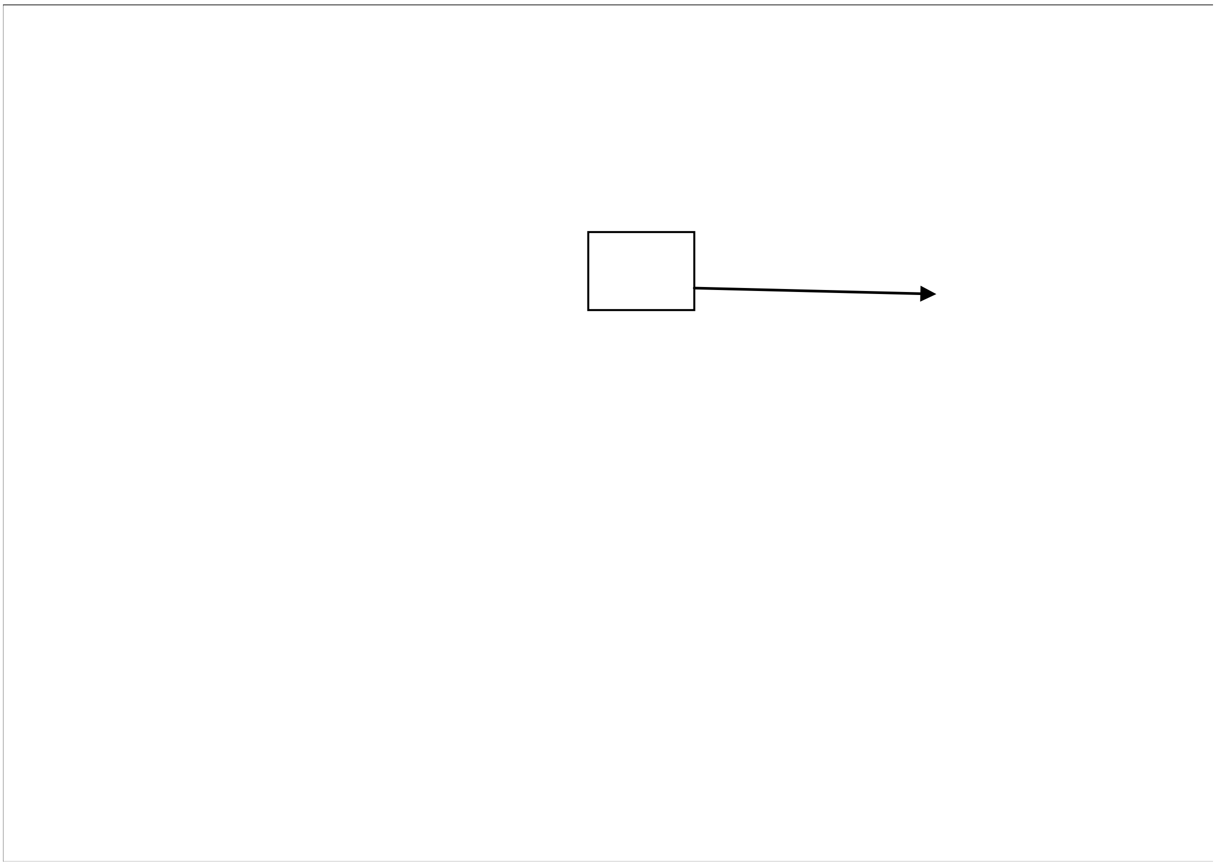
Une dimension peut ne pas être entière. Nos sens nous permettent d'appréhender la réalité en trois dimension. Le temps qui passe nous permet d'approcher la notion d'espace temps d'Einstein, espace à quatre dimension, les trois dimensions de base : la longueur, la largeur, la hauteur enfin le temps.

Pourtant, nous ne sommes pas intuitivement capable d'imaginer la forme des objets au-delà des trois dimensions de base. Que devient un cube en quatre dimensions ? On parle alors d'hypercube.

Comment imaginer alors notre univers à 10, 11 voir 26 dimensions que certaines théories voulant l'expliquer proposent (Théorie des cordes) ?

La méthode que nous avons utilisé et appliqué sur la côte de Guadeloupe, pour calculer la dimension fractale de celle-ci est la méthode Minkowski-Bouligand. on l'appelle aussi méthode Box-Counting.

Cette méthode est basée sur un l'utilisation de réseaux de carreaux avec des tailles différentes qui recouvrent la côte. Nous avons utilisé des carreaux de 1000 m de coté, de 500 m, de 250 m, de 100 m, de 50 m, de 25 m enfin de 24 m. Nous n'avons pas pu descendre au dessous de carreaux de 24 m de coté car la machine dont nous disposions n'était pas assez puissante.



Méthode de

"Les carreaux sont de côtés ε alors c'est en appliquant un agrandissement de 1/ε qu'on obtient le carré de longueur 1 et on peut estimer que chacun de ces petits carreaux est une miniature d'un carré de côté 1. Si on note N" le nombre de carreaux nécessaires au recouvrement de la côte, sa dimension fractale sera pour "   assez petit :

$$d \approx \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

Plus formellement on obtiendra la dimension fractale en faisant tendre " vers zéro. On obtient ce qui s'appelle la dimension de Bouligand (aussi de Minkowski-Bouligand, ou box-counting en anglais) d'un objet fractal F.

***BOULIGAND Georges Louis**, mathématicien français, 1889-1979 Normalien (ancien élève de l'École normale supérieure), agrégé de mathématiques (1912), Bouligand enseigna tout d'abord au lycée de Rennes en classe de mathématiques spéciales. Il sera professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers (1928) avant d'être nommé à la Sorbonne (1938). La diversité des travaux de Bouligand tant en mathématiques qu'en physique est impressionnante : auteur de très nombreux articles et manuels portant sur l'analyse, la géométrie analytique et différentielle, la mécanique rationnelle, la théorie de la relativité, les objets fractals, la topologie, la physique mathématique : théorie du potentiel, mécanique des solides et des fluides.*

En notant dim(F) cette dimension on a donc :

$$\dim(\mathscr{F}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln(N_\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

Son avantage est de pouvoir se prêter à des calculs effectifs (par ordinateur) du comptage de carreaux, donnant une valeur approchée de la dimension de n'importe quelle fractale dont on a une image.

Pour être plus précis ou peut faire une approche graphique, et ne pas retenir un seul comptage de carreaux de côté donné mais plusieurs, on utilise un graphique. On suspecte que le nombre N" de carreaux recouvrant la fractale suit une loi de puissance de la forme :

$$N_\varepsilon = C \times \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^d \quad \text{où } C \text{ est une constante}$$

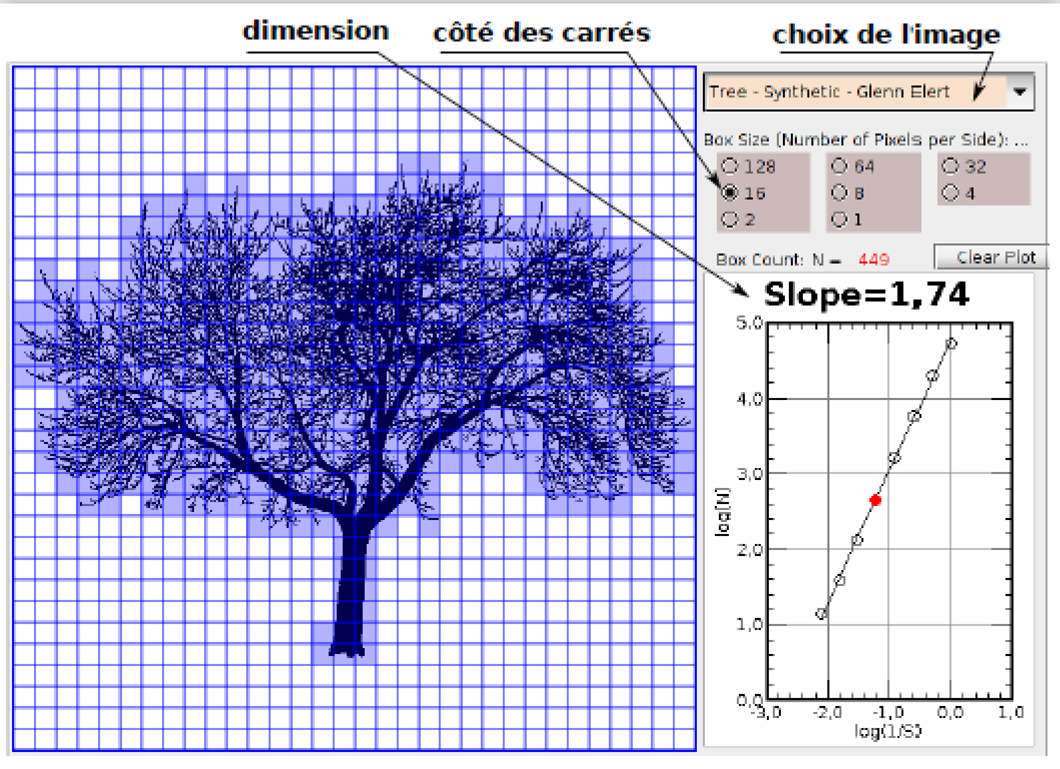
Ainsi en prenant le logarithme (Rappels : ln(ab) = ln(a) + ln(b) et ln(an) = n ln(a)) on a :

$$\ln(N_\varepsilon) = d \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \ln(C)$$

Autrement dit en posant :

$$Y = \ln(N_\varepsilon) \text{ et } X = \ln\left(\tfrac{1}{\varepsilon}\right)$$

cette relation est de la forme Y = dX + C c'est à dire que le graphique de Y = ln(NƐ) en fonction de X = ln(1/Ɛ) doit donner une droite dont la pente (slope in english) est la dimension cherchée : d."



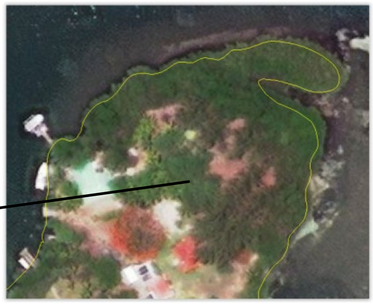
Source : Vincent Pantaloni, Professeur de mathématique, Lycée Jean Zay, Orléans, 15 avril 2011.

Résultats sur la côte de la Guadeloupe.

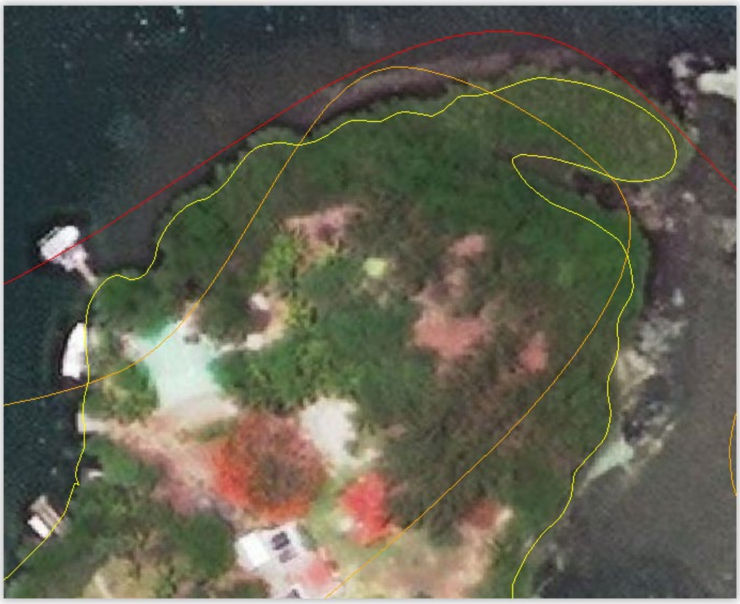
Rappelons que nous avons numérisé le trait de côte de la Guadeloupe aux échelles suivantes : au $800^{\text{ième}}$, au $5000^{\text{ième}}$, au $10000^{\text{ième}}$, au $25000^{\text{ième}}$, au $50000^{\text{ième}}$, au $100000^{\text{ième}}$ enfin au $200000^{\text{ième}}$. La précision du dessin va donc varier logiquement. Plus on est à grande échelle donc au $800^{\text{ième,}}$ plus le dessin de la côte est précis prenant en compte les plus petites baies et les plus petits caps. Plus on remontera dans les petites échelles (on zoome arrière vers le $200000^{\text{ième}}$) moins le dessin sera précis puisque les plus petites baies et caps deviennent de moins en moins visibles.

Le léger décallage entre le trait de côte et les images, s'expliquent simplement par le fait que les images ont été mises à jour, entre le moment où nous avons numérisé nos traits de côte et aujourd'hui. Malheureusement, le calage des nouvelles images par les techniciens ne peut jamais être tout à identique d'où ce léger décalage.

Trait de côte à diffentes échelles :



$200000^{\text{ième}}$ $25000^{\text{ième}}$ $800^{\text{ième}}$



Ci-dessus, on constate bien l'imprécision du dessin du trait de côte en fonction de l'échelle.Le contour rouge a été dessiné au $200000^{\text{ième}}$, le trait orange l'a été au $25000^{\text{ième}}$, le trait jaune $800^{\text{ième.}}$.

Il est paraît évident que ces différences en terme de dessin vont agir sur la valeur de la dimension fractale de la côte en fonction des échelles.

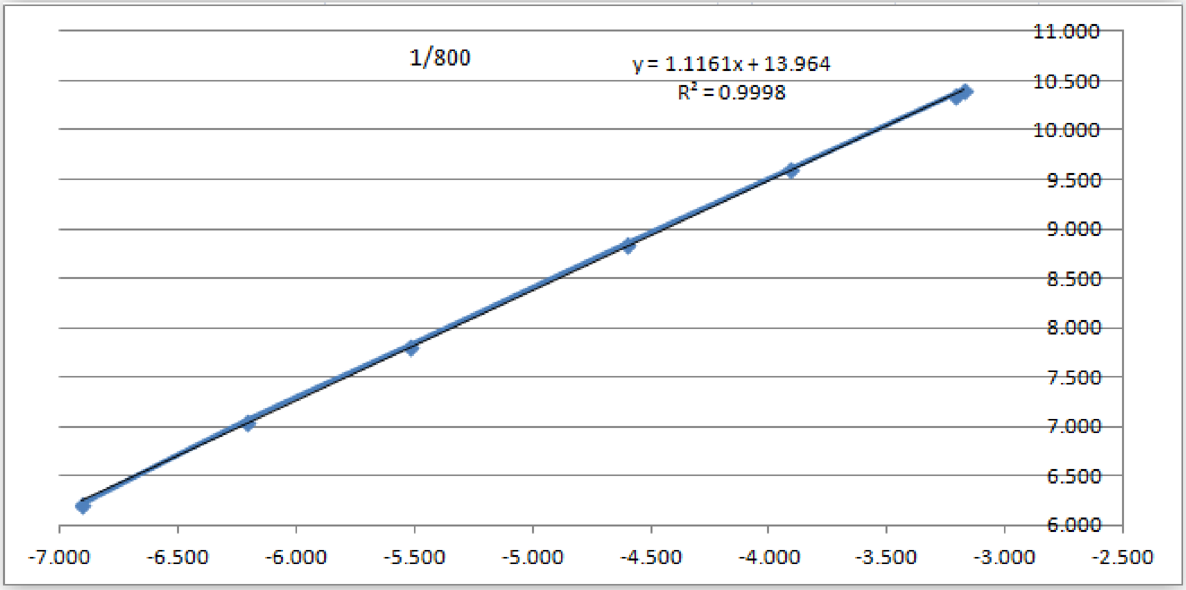
Rappelons que :

$N(\varepsilon)$ est le nombre de carreaux couvrant le trait de côte,

et que ε est la longueur du coté d'un carreau.

Résultat pour l'échelle, trait de côte le plus précis, 1:800^ième^.

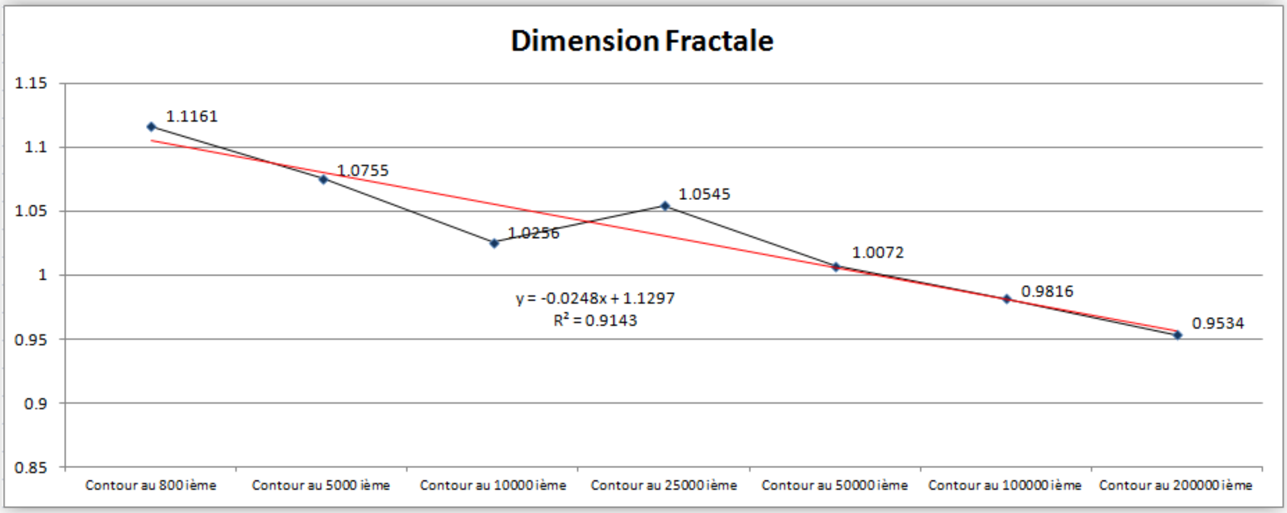
Contour au 800 ième			
		$\ln(1/\varepsilon)$	$\ln(N_\varepsilon)$
ε	$N(\varepsilon)$	X	Y
24	32913	-3.178	10.402
25	31498	-3.219	10.358
50	14797	-3.912	9.602
100	6948	-4.605	8.846
250	2487	-5.521	7.819
500	1157	-6.215	7.054
1000	499	-6.908	6.213



La dimension fractale correspond à la pente de la droite soit 1.1161. Nous fournissons en annexe les résultats pour les autres contours. On va pouvoir constater enfin et comme prévu, que l'échelle à laquelle on dessine une trait de côte influe sur la dimension fractale d'un trait de côte. Pour approcher cette dimension au plus près de la réalité, il faut donc numériser un trait de côte à la plus grande échelle possible.

Echelle	Dimension Fractale
Contour au 800 ième	1.1161
Contour au 5000 ième	1.0755
Contour au 10000 ième	1.0256
Contour au 25000 ième	1.0545
Contour au 50000 ième	1.0072
Contour au 100000 ième	0.9816
Contour au 200000 ième	0.9534

Ce tableau résume l'ensemble des calculs de la dimension fractale selon les différentes échelles de dessin.



On constate que la dimension fractale baisse quand l'échelle tend vers zéro vers les petites échelles. Comme la dimension fractale d'une côte est non entière et que sa valeur est tourjours supérieure à la dimension topologique (ici la DP est 1), on constate qu'elle devient erronée à partir de l'échelle de 1:100000$^{\text{ième.}}$. Il ne fait aucun doute, qu'à cette échelle le dessin de la côte devient trop imprécis pour l'obtenir.

Rappelons sur les échelles :

Grande échelle donc le terrain

Echelle de réduction	Valeur de Réduction	1cm sur une carte = 1 cm sur le terrain	en mètres	en Km
1 / 1	1	1	0.01	0.00001
1 / 10	0.1	10	0.10	0.0001
1 / 100	0.01	100	1.00	0.001
1 / 1000	0.001	1 000	10	0.01
1 / 10000	0.0001	10 000	100	0.1
1 / 100000	0.00001	100 000	1 000	1
1 / 1000000	0.000001	1 000 000	10 000	10
1 / 10000000	0.0000001	10 000 000	100 000	100

Petite échelle Vers zéro

Diamètre équatorial de la Terre = 12756.274 en Km

soit 12756274 en m

soit 1275627400 en cm

l'Echelle 1 / 100 000 000 = 0.00000001

Diamètre équatorial sur une carte

1275627400 cm * (1 /100 000 000) = 12.756274 en cm

J'ai donc besoin d'une feuille de 15 cm sur 15 cm pour représenter la planète.

Globalement, on voit que l'évolution de cette dimension est linéaire. Les écarts à la courbe de tendance s'expliquent par les différences de dessin du trait de côte en fonction de l'échelle. Il faut savoir que cette dimension varie non seulement en fonction de l'échelle mais aussi à cause d'un autre facteur. En effet, il n'existe aucune méthode automatique fiable permettant d'extraire un trait de côte précis. Seul un humain avec ses yeux, peut faire se travaille précisément. Il faut donc bien avoir à l'esprit que le dessin est donc une interprétation subjective de la côte basé sur des choix. Deux personnes travaillant sur une même zone à la même échelle, ne dessineront pas de la même manière un même trait de côte. Cela ne peut qu'influer sur la dimension fractale d'une côte. On ne peut donc avoir qu'une valeur aprrochée de celle-ci.

Conclusion

Le problème de l'échelle est finalement un problème qui n'est pas qu'un problème de Géographie. Les objets fractals observables dans la nature le prouvent. Selon la distance à laquelle on observe un objet, donc selon l'échelle d'observation, nos sens nous trompent. Si nous nous éloignons d'un objet observé, nos yeux qui n'ont qu'une résolution spatiale limitée ne nous permettent plus de voir les détails de la structure de l'objet au-delà d'une certaine distance. Par résolution spatiale, il faut comprendre : la capacité d'isoler les détails d'un objet quand la distance d'observation augmente.

Ceci est valable aussi pour nos autres sens, certaines personnes ont des capacités auditives leur permettant d'isoler des sons que d'autres ne perçoivent pas. Les personnes malvoyantes ont des capacités auditives et tactiles beaucoup plus développées que le commun des mortels. Certains animaux ont eux aussi des capacités largement supérieures aux humains, pensons au flair des chiens, à la possibilité de voir dans l'obscurité etc.

L'échelle où l'on observe un objet, est fondamentale pour comprendre la réalité et la décrire. C'est aussi le cas quand on numérise un trait de côte comme celui de la Guadeloupe. En science, on a constaté une accélération considérable, même phénoménale de nos connaissances grâce à ces connaissances elles-mêmes, mais surtout grâce à tous les instruments de mesures et d'observations qui en ont découlé. Nos connaissances nous ont permises d'observer des objets à des échelles inaccessibles par le passé, aussi bien dans l'infiniment petit que dans l'infiniment grand. Ceci, c'est traduit par des progrès extraordinaires de la connaissance et de l'appréhension de la réalité.

La dimension fractale est donc un indice prouvant que la réalité est beaucoup plus complexe qu'il n'y paraît bien souvent. Pourtant, plus les connaissances progressent, plus nous observons des objets à des échelles anciennement inaccessibles, plus de nouvelles questions apparaissent.